Seminar 3/4 - Rangul unei matrice. Sisteme de ecuații liniare

1. Să se calculeze rangul următoarelor matrice pentru diferite valori ale parametrului real α:

   $(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$; $(b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze rangul matricelor:

   $$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ (b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ (c)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Să dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & n \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine m şi n astfel încât încât cele două matrice să aibă acelaşi rang.

4. Să se rezolve sistemul

   $$\begin{cases} x + 2y + 4z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= -6 \\ x + y - 2z &= 2 \end{cases}$$

   scriindu-l ca o ecuație matriceală.

5. Folosind regula lui Cramer, să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare:

   $$\begin{cases} 2x + 3y + 5z &= 38 \\ 3x + 5y + 2z &= 31 \\ 5x + 2y + 3z &= 31 \end{cases}$$

6. Să se rezolve următoarele sisteme omogene:

   $$(a)\ \begin{cases} x - 3y + 4z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 0 \\ 3x - 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

7. Să se rezolve şi să se discute soluțiile sistemelor omogene următoare, în funcție de parametrii reali λ, respectiv m.:

   $$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ x + \lambda^2 z &= 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

8. Să se rezolve şi să se discute tipul sistemelor, în funcție de parametrii reali ce apar.:

$$(a)\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 &= 2\\ x_1+3x_2+x_3 &= 5\\ x_1+x_2+5x_3 &= -7\\ 2x_1+3x_2-3x_3 &= 14 \end{cases};\quad (b)\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3 &= \lambda\\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3 &= 1\\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3 &= 1 \end{cases};$$

$$(c)\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3 &= 11\\ 7x_1-3x_2+5x_3 &= 6\\ 3x_1+x_2-8x_3 &= 15\\ 6x_1-5x_2+11x_3 &= -4 \end{cases}\quad (d)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4\\ x_2-x_3+x_4 &= -3\\ x_1+3x_2-3x_4 &= 1\\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases};$$

$$(e)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 11\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 &= 12\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 &= 13\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4 &= 14 \end{cases}$$

$$(f)\begin{cases} (\alpha-1)\,x+\alpha y+(\alpha+1)\,z &= 1\\ (\beta-1)\,x+\beta y+(\beta+1)\,z &= 1\\ x+y+z &= -2 \end{cases}$$

9. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele:

$$(a)\begin{cases} x+2y-3z &= 0\\ 2x-y+z &= -3\\ y+2z &= 4 \end{cases};\quad (b)\begin{cases} x+y+z-t &= 2\\ 2x+y-z+2t &= 9\\ -x+2y+2z-t &= 5\\ x+3y-z-2t &= -4 \end{cases}$$

şi

$$(c)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4 &= 2\\ x_1-2x_2-2x_4 &= -1 \end{cases};\quad (d)\begin{cases} x+2y+z &= 3\\ 2x-y+3z &= 2\\ x-3y+2z &= 0 \end{cases};\quad (e)\begin{cases} x-2y+z &= -4\\ 4x+3y-2z &= 11\\ -2x+3y+4z &= 11 \end{cases}$$